Übersicht komplexe Zahlen/komplexe Funktionen

Definition: $j^2 = j \cdot j = -1$

Euler'sche Formel: $e^{\pm j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) \pm j \cdot \sin(\varphi)$

Darstellung und Umrechnung

Komponentendarstellung: $\underline{z} = x + j \cdot y$

$x = \mathrm{Re}\{\underline{z}\} \qquad y = \mathrm{Im}\{\underline{z}\}$

Polardarstellung: $\underline{z} = z \cdot e^{j \cdot \varphi}$

$z = |\underline{z}| \qquad \varphi = \arg(\underline{z})$ immer in rad.!

Umrechnung Komponentendarstellung → Polardarstellung:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\mathrm{Re}\{\underline{z}\}^2 + \mathrm{Im}\{\underline{z}\}^2}$$

$$\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) = \arctan(\frac{\mathrm{Im}\{\underline{z}\}}{\mathrm{Re}\{\underline{z}\}})$$ Achtung! Wenn Nenner negativ, π zum Ergebnis addieren

Umrechnung Polardarstellung → Komponentendarstellung:

$x = z \cdot \cos(\varphi) \qquad y = z \cdot \sin(\varphi)$

Grundrechenarten (inkl. Potenzieren)

Addition (über Komponentendarstellung):

$$x_1 + j \cdot y_1 + x_2 + j \cdot y_2 = (x_1 + x_2) + j \cdot (y_1 + y_2)$$

Subtraktion (über Komponentendarstellung):

$$x_1 + j \cdot y_1 - (x_2 + j \cdot y_2) = (x_1 - x_2) + j \cdot (y_1 - y_2)$$

Multiplikation (über Polardarstellung): $z_1 \cdot e^{j \cdot \varphi_1} \cdot z_2 \cdot e^{j \cdot \varphi_2} = (z_1 \cdot z_2) \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}$

Division (über Polardarstellung): $\frac{z_1 \cdot e^{j \cdot \varphi_1}}{z_2 \cdot e^{j \cdot \varphi_2}} = \frac{z_1}{z_2} \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$

Potenzieren (über Polardarstellung): $(z \cdot e^{j \cdot \varphi})^n = z^n \cdot e^{j \cdot n \cdot \varphi}$

Wurzeln komplexer Zahlen (mit mehreren Lösungen)

$\sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{z \cdot e^{j \cdot \varphi}} = \sqrt[n]{z} \cdot e^{j(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n})}$, k = 0, 1, 2, … n-1 immer n Lösungen!

Funktionsdefinitionen (Hauptwerte)

Exponential-/Logarithmusfunktionen

$Ln(\underline{z}) = Ln(z) + j\varphi \qquad e^{\underline{z}} = e^x \cdot e^{j \cdot y}$

Winkelfunktionen

$Sin(\underline{z}) = \sin(x) \cdot \cosh(y) + j \cdot \cos(x) \cdot \sinh(y)$

$Cos(\underline{z}) = \cos(x) \cdot \cosh(y) - j \cdot \sin(x) \cdot \sinh(y)$

Hyperbelfunktionen

$Sinh(\underline{z}) = \sinh(x) \cdot \cos(y) + j \cdot \cosh(x) \cdot \sin(y)$

$Cosh(\underline{z}) = \cosh(x) \cdot \cos(y) + j \cdot \sinh(x) \cdot \sin(y)$

Arcusfunktionen

$Arc\sin(\underline{z}) = -j \cdot Ln(j \cdot \underline{z} + \sqrt{1 - \underline{z}^2})$

$Arc\cos(\underline{z}) = -j \cdot Ln(\underline{z} + j \cdot \sqrt{1 - \underline{z}^2})$

Areafunktionen

$ArSinh(\underline{z}) = Ln(\underline{z} + \sqrt{\underline{z}^2 + 1})$

$ArCosh(\underline{z}) = Ln(\underline{z} + \sqrt{\underline{z}^2 - 1})$