Reduktion der MDCT auf die DCT-IV

Dieses Dokument beschreibt die Herleitung des in den Audiodatenkompressionsunterlagen erwähnten Zusammenhanges zwischen MDCT und DCT-IV.

Notation

Sei $X = \{X_n \mid n \in \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 2N-1\}\}$ eine Folge von $2N$ Eingangswerten der MDCT. Fasst man je $\frac{N}{2}$ derselben zu insgesamt vier Wertegruppen $\vec{X}_0$, $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$ und $\vec{X}_3$ zusammen, wobei

$$\vec{X}_i := \left(X_{i\frac{N}{2}}, X_{i\frac{N}{2}+1}, \ldots, X_{(i+1)\frac{N}{2}-1}\right), i \in \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 3\}, \quad (1)$$

lässt sich die Eingangswertfolge als $\left(\vec{X}_0, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3\right)$ schreiben.
Desweiteren sei der Operator ^{U} definiert, der eine gegebene Eingangswertfolge in ihrer Reihenfolge umgekehrt, d.h. insbesondere die Definition der in ihrer Reihenfolge umgekehrten Wertegruppen $\vec{X}_0^U$, $\vec{X}_1^U$, $\vec{X}_2^U$ und $\vec{X}_3^U$ erlaubt:

$$\vec{X}_i^U := \left(X_{(i+1)\frac{N}{2}-1}, X_{(i+1)\frac{N}{2}-2}, \ldots, X_{i\frac{N}{2}}\right) \quad (2)$$

Herleitung

Die MDCT mit $2N$ Eingangswerten ist definiert als

$$Y_k = \sum_{n=0}^{2N-1} X_n cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\right)}{N}\right), k \in \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq N-1\} \quad (3)$$

Diese Formel unterscheidet sich von der der DCT-IV im Versatz um $\frac{N}{2}$ sowie in der oberen Summengrenze für n. Der Versatz kann durch die Variablensubstitution $n + \frac{N}{2} \rightarrow n'$ (sodass $n = n' - \frac{N}{2}$) eliminiert werden:

$$Y_k = \sum_{n'=\frac{N}{2}}^{\frac{5N}{2}-1} X_{n'-\frac{N}{2}} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n'+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \quad (4)$$

Zur Reduktion der oberen Summengrenze wird die Summe zuerst in je $\frac{N}{2}$ Summanden umfassende Teilsummen zerlegt:

$$Y_k = A + B + C + D, \quad (5)$$

wobei

$$A = \sum_{n'=\frac{N}{2}}^{N-1} X_{n'-\frac{N}{2}} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n'+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \quad (6)$$

$$B = \sum_{n'=N}^{\frac{3N}{2}-1} X_{n'-\frac{N}{2}} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n'+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \quad (7)$$

$$C = \sum_{n'=\frac{3N}{2}}^{2N-1} X_{n'-\frac{N}{2}} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n'+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{8}$$

$$D = \sum_{n'=2N}^{\frac{5N}{2}-1} X_{n'-\frac{N}{2}} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n'+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{9}$$

Nachfolgend werden die vier Teilsummen getrennt umgeformt und vereinfacht. Die Abweichung von der kanonischen Reihenfolge dient dabei dem besseren Verständnis der Vereinfachungsschritte, die einander ähneln bzw. aufeinander aufbauen.

Umformung der ersten Teilsumme (A)

Die Eingangswerte $X_{n'-\frac{N}{2}}, n' \in \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{N}{2} \leq x \leq N-1\right\}$ in A entsprechen $X_0, X_1, \ldots, X_{\frac{N}{2}-1}$ und damit der ersten Wertegruppe $\vec{X}_0$:

$$A = \sum_{n'=\frac{N}{2}}^{N-1} \left(\vec{X}_0\right)_{n'-\frac{N}{2}} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n'+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{10}$$

Die Verschiebung des Index um $\frac{N}{2}$ ist dabei wegen des verschobenen Wertebereiches der Summe notwendig.

Umformung der vierten Teilsumme (D)

Da die Grenzen der Teilsumme B durch die Variablensubstitution in Gleichung 4 den Eingangswerteindexbereich (zwischen 0 und $2N$) überschreiten, wird n' um $2N$ reduziert, d.h. $n' - 2N \rightarrow n''$ bzw. $n' = n'' + 2N$:

$$D = \sum_{n''=0}^{\frac{N}{2}-1} X_{n''+\frac{3N}{2}} \underbrace{cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n''+2N+\frac{1}{2}\right)}{N}\right)}_{\Psi_D} \tag{11}$$

Der *cos*-Term Ψ_D lässt sich durch teilweises Ausmultiplizieren erweitern zu

$$\Psi_D = cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n''+\frac{1}{2}\right)+2\pi N\left(k+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{12}$$

Durch Teilen des Bruches in zwei Summanden lässt sich der zweite kürzen:

$$\Psi_D = cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n''+\frac{1}{2}\right)}{N} + 2\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\right) \tag{13}$$

Da $k \in \{M|M \subset \mathbb{N}\}$ (vgl. Gleichung 3) und der Cosinus 2π-periodisch ist, lässt sich Ψ_D vereinfachen zu

$$\Psi_D = cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n''+\frac{1}{2}\right)}{N} + \pi\right) \tag{14}$$

Da $\forall x \in \mathbb{R} : cos(x + \pi) = -cos(x)$:

$$\Psi_D = -cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n''+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{15}$$

Rückeinsetzen der vereinfachten Form für Ψ_D in Gleichung 11 ergibt

$$D = -\sum_{n''=0}^{\frac{N}{2}-1} X_{n''+\frac{3N}{2}}\, cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n''+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{16}$$

Die Eingangswerte $X_{n''+\frac{3N}{2}}, n'' \in \left\{x \in \mathbb{N} \mid 0 \le x \le \frac{N}{2} - 1\right\}$ in D entsprechen $X_{\frac{3N}{2}}, X_{\frac{3N}{2}+1}, \ldots, X_{2N-1}$ und damit der vierten Wertegruppe $\vec{X}_3$:

$$D = -\sum_{n''=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(\vec{X}_3\right)_{n''} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n''+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{17}$$

Umformung der zweiten Teilsumme (B)

Die Grenzen der Teilsumme B werden analog zur Teilsumme D durch eine Variablensubstitution (vgl. Gleichung 11) angepasst:

$$B = \sum_{n''=-N}^{-\frac{N}{2}-1} X_{n''+\frac{3N}{2}} \underbrace{cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n''+2N+\frac{1}{2}\right)}{N}\right)}_{\Psi_B} \tag{18}$$

Da der *cos*-Termin $\Psi_B = \Psi_D$ (vgl. Gleichung 11), lässt sich Φ_B lt. Gleichung 15 schreiben als

$$B = -\sum_{n''=-N}^{-\frac{N}{2}-1} X_{n''+\frac{3N}{2}}\, cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n''+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{19}$$

Um den Eingangswerteindexbereich positiv zu machen, wird $-n'' \to n'''$ (bzw. $n'' = -n'''$) ersetzt. Die Summengrenzen müssen dabei vertauscht werden.

$$B = -\sum_{n'''=\frac{N}{2}+1}^{N} X_{\frac{3N}{2}-n'''} \underbrace{cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(-n'''+\frac{1}{2}\right)}{N}\right)}_{\Phi_B} \tag{20}$$

Durch die Symmetrie des *cos*-Terms gilt:

$$\Phi_B = cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n'''-\frac{1}{2}\right)}{N}\right) = cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\left(n'''-1\right)+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{21}$$

Rückeinsetzen der vereinfachten Form von Φ_B in Gleichung 20 ergibt

$$B = -\sum_{n'''=\frac{N}{2}+1}^{N} X_{\frac{3N}{2}-n'''} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left((n'''-1)+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{22}$$

Eine weitere Substitution $n'''-1 \rightarrow n''''$ (mit $n''' = n''''+1$) liefert

$$B = -\sum_{n'''=\frac{N}{2}}^{N-1} X_{\frac{3N}{2}-1-n''''} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n''''+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{23}$$

Die Eingangswerte $X_{\frac{3N}{2}-1-n''''}, n'''' \in \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{N}{2} \leq x \leq N-1\right\}$ in B entsprechen $X_{N-1}, X_{N-2}, \ldots, X_{\frac{N}{2}}$ und damit der der in ihrer Reihenfolge umgekehrten zweiten Wertegruppe $\vec{X}_1$:

$$B = -\sum_{n''''=\frac{N}{2}}^{N-1} \left(\vec{X}_1^U\right)_{n''''-\frac{N}{2}} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n''''+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{24}$$

Die Verschiebung des Index um $\frac{N}{2}$ ist dabei wegen des verschobenen Wertebereiches der Summe notwendig.

Umformung der dritten Teilsumme (C)

Die Grenzen der Teilsumme C werden analog zur Teilsumme D durch eine Variablensubstitution (vgl. Gleichung 11) angepasst:

$$C = \sum_{n''=-\frac{N}{2}}^{-1} X_{n''-\frac{3N}{2}} \underbrace{cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n'-2N+\frac{1}{2}\right)}{N}\right)}_{\Psi_C} \tag{25}$$

Da der *cos*-Termin $\Psi_C = \Psi_B$ (vgl. Gleichung 18), lässt sich Ψ_C lt. Gleichung 19 schreiben als

$$C = -\sum_{n''=-\frac{N}{2}}^{-1} X_{n''-\frac{3N}{2}} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n''+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{26}$$

Analog lässt sich das Vorzeichen der Laufvariable n'' zu n''' umkehren (vgl. Gleichung 22) und $n'''-1 \rightarrow n''''$ (vgl. Gleichung 23) substituieren:

$$C = -\sum_{n''''=0}^{\frac{N}{2}-1} X_{\frac{3N}{2}-1-n''''} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n''''+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{27}$$

Die Eingangswerte $X_{\frac{3N}{2}-1-n''''}, n'''' \in \left\{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq \frac{N}{2}-1\right\}$ in C entsprechen $X_{\frac{3N}{2}-1}, X_{\frac{3N}{2}-2}, \ldots, X_N$ und damit der der in ihrer Reihenfolge umgekehrten dritten Wertegruppe $\vec{X}_2$:

$$C = -\sum_{n''''=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(\vec{X}_2^U\right)_{n''''} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n''''+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{28}$$

Zusammenfassung der Teilsummen

Die Teilsummen lauten durch die in den vorherigen Unterabschnitten beschriebenen Vereinfachungen mit vereinheitlichtem Laufindex n:

$$A = \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} \left(\vec{X}_0\right)_{n-\frac{N}{2}} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{29}$$

$$B = -\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} \left(\vec{X}_1^U\right)_{n-\frac{N}{2}} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{30}$$

$$C = -\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(\vec{X}_2^U\right)_{n} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{31}$$

$$D = -\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(\vec{X}_3\right)_{n} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{32}$$

Da A und B sowie C und D jeweils dieselben Summengrenzen haben, können sie paarweise zusammengefasst werden:

$$A + B = \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} \left(\vec{X}_0 - \vec{X}_1^U\right)_{n-\frac{N}{2}} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{33}$$

$$C + D = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(-\vec{X}_2^U - \vec{X}_3\right)_{n} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{34}$$

Da die Summengrenzen von $A+B$ und $C+D$ direkt aufeinander folgen, können die Summen zusammengefasst werden:

$$A+B+C+D = \sum_{n=0}^{N-1} \left(-\vec{X}_2^U - \vec{X}_3, \vec{X}_0 - \vec{X}_1^U\right)_{n} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{35}$$

Dabei wird die Wertegruppe aus der Summe von $C + D$ an jene der Summe von $A + B$ angehängt, wodurch die Indexverschiebung der ersteren nicht mehr notwendig ist. Da die rechte Seite von Gleichung 5 äquivalent zur linken Seite von Gleichung 35 ist, lässt sich die MDCT schreiben als

$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} \left(-\vec{X}_2^U - \vec{X}_3, \vec{X}_0 - \vec{X}_1^U\right)_{n} cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{36}$$

Aus der Definition der DCT-IV

$$Y'_k = \sum_{n=0}^{N-1} X'_n cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right) \tag{37}$$

und dem Vergleich derselben mit Gleichung 36 ist ersichtlich, dass die MDCT von $X_n = \left(\vec{X}_0, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3\right)_n$ (vgl. Wertgruppennotation aus Gleichung 1) ident zur DCT-IV von $\left(-\vec{X}_2^U - \vec{X}_3, \vec{X}_0 - \vec{X}_1^U\right)_n$ ist.